УДК 681.325.5

О. Д. Азаров, д. т. н., проф.; О. І. Черняк

РОЗРЯДНІСТЬ ПРИСТРОЇВ ПОРОЗРЯДНОГО ДОДАВАННЯ В *АМ*-СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ

У цій статті розглянуто клас систем числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів. Описано порозрядне додавання у таких системах числення та визначено межі, в яких знаходиться розрядність порозрядних суматорів.
Ключові слова: *порозрядне додавання, системи числення, адитивні перетворення.*

Актуальність

Підвищення продуктивності технічних засобів може бути досягнуте за рахунок розподіленої обробки множинних потоків даних. Ефективна організація розподіленої обробки потребує вирішення проблеми інформаційних зв'язків між пристроями. Ця проблема полягає у тому, що зі збільшенням кількості розподілених пристроїв значно швидше зростає загальна кількість інформаційних зв'язків між ними.

Одним з відомих підходів до вирішення цієї проблеми є конвеєрна порозрядна обробка послідовних кодів чисел [1 – 5]. Виконання усіх порозрядних конвеєрних операцій в єдиному потоці здійснюється за відомими алгоритмами, починаючи зі старших розрядів. Для цього використовуються надлишкові системи числення, оскільки в них існує обмеження довжини перенесення у старші розряди при порозрядному додаванні і відніманні.

При порозрядному конвеєрному додаванні, починаючи зі старших розрядів, перенесення має певну довжину, яка визначає розрядність порозрядних суматорів. У свою чергу розрядність порозрядних суматорів суттєво впливає на апаратні витрати при побудові засобів для конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів. Надлишкових систем числення з двійковими цифрами може існувати велика кількість, але не у кожній такій системі можливе обмеження довжини перенесення при виконанні арифметичних операцій. Авторами визначено клас надлишкових позиційних систем числення, названих *АМ*-системами числення, в яких можна порозрядно виконувати всі арифметичні операції, починаючи зі старших розрядів [6]. При порозрядному додаванні в *АМ*-системах числення перенесення виконується на основі адитивних перетворень. Довжина перенесення визначає розрядність порозрядного суматора. Однак, відсутні відомі теоретичні розробки, за допомогою яких можна було б визначати довжину перенесення в залежності від параметрів системи числення і таким чином порівнювати розрядності порозрядних суматорів для будь-яких *АМ*-систем числення.

Мета

Метою статті є підвищення ефективності проектування пристроїв порозрядної обробки у будь-якій *АМ*-системі числення за рахунок визначення залежності розрядності порозрядних суматорів від параметрів заданої системи числення.

Задачі

Для досягнення цієї мети потрібно вирішити такі задачі:

1. Дослідження *АМ*-систем числення, що узагальнюють відомі і дозволяють створювати нові системи числення з можливістю конвеєрного порозрядного виконання усіх арифметичних операцій над послідовними кодами чисел, починаючи зі старших розрядів;

2. Дослідження адитивних перетворень – умовних числових операцій у *АМ*-системах числення та визначення їх зв'язку з відомими операціями перенесення та запозичення.

3. Дослідження порозрядного додавання і визначення залежності довжини перенесення

від параметрів адитивного співвідношення.

АМ-системи числення

Введемо поняття систем числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів (*АМ*-систем числення). *АМ*-системи числення – це позиційні надлишкові системи числення, в яких вага кожного розряду являє собою ступінь основи системи числення, а між вагами розрядів існує адитивне співвідношення певного виду із заданими обмеженнями. Будь-яка *АМ*-система числення може бути описана такою сукупністю параметрів

$$\left\{\begin{array}{l} C_k = \{0,...,c_{k-1}\}; \\ w; \\ {}^{t}A^{\tau,p} : w^{\tau p+t} = R^{\tau,p} \end{array}\right\}, \tag{1}$$

де k≥2 – значність системи числення; C_k – множина цифр; w – основа системи числення; ${}^{t}A^{\tau,p}$ – адитивне співвідношення (*А*-співвідношення) порядку $(t,\ \tau,\ p)$; $t, \tau,\ p$ – параметри адитивного співвідношення (t>0, τ>0, p≥0 – цілі); $R^{\tau,p} = \sum_{i=0}^{p} r_i \cdot w^{\tau i}$ – граничне значення $\left(r \in C_k\right)$.

При цьому на параметри адитивного співвідношення накладаються такі обмеження:

$$\begin{cases} r_{\tau i} \ge r_{\tau(i-1)} > 0; \\ \tau_{\operatorname{mod} t} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Адитивне співвідношення задається параметрами t і τ, а також набором цифр $r_\tau,...,r_0$, що не залежать від номера розряду. Поліном $R^{\tau,p}$ може бути представлений у вигляді коду

$$r_{\tau p}\underbrace{0\cdots 0 r_{\tau(p-1)}}_{\tau}\cdots\underbrace{0\cdots 0 r_{\tau}}_{\tau}\underbrace{0\cdots 0 r_0}_{\tau}.$$

При цьому вважається, що

$$R_{i-\tau p}^{\tau,p} = w^{i-\tau p} \cdot R^{\tau,p}.$$

Між адитивним співвідношенням, основою системи числення і множиною цифр існує такий зв'язок: основа системи числення є додатним дійсним коренем адитивного співвідношення, в якому коефіцієнти при невідомому є цифрами. Виходячи з цього, *АМ*-система числення може бути однозначно задана будь-якою з пар параметрів $\{C_k, {}^{t}A^{\tau,p}\}$ або $\{C_k, w\}$ згідно (1). Враховуючи необхідність дотримання обмежень, що накладаються на адитивні співвідношення в (2), найбільш просто задавати *АМ*-систему числення за допомогою параметрів C_k і ${}^{t}A^{\tau,p}$.

Адитивні перетворення

Наявність адитивних співвідношень між розрядами в *АМ*-системах числення дозволяє виконувати операції адитивного перетворення кодів чисел (*А*-перетворення), що полягають у зміні коду числа при збереженні його числового еквіваленту. *А*-перетворення є особливим типом умовних числових операцій, що виконуються над частиною коду числа або над усім кодом. При виконанні *А*-перетворення над кодом числа старші і молодші відносно цього перетворення розряди змінюють своє значення, однак значення всього коду не змінюється. Зміна частин кодів здійснюється за рахунок операцій додавання і віднімання. Операції збільшення однієї частини коду числа і зменшення іншої при незмінному значенні всього коду відомі під назвою перенесення і запозичення. Отже, адитивні перетворення здійснюють перенесення і запозичення при додаванні і відніманні кодів в *АМ*-системах числення. Запозичення у подальшому буде також називатись перенесенням у молодші розряди.

Адитивні перетворення можна класифікувати за напрямком перенесення і за умовою виконання. На рис. 1 наведено класифікацію адитивних перетворень в *АМ*-системах числення.

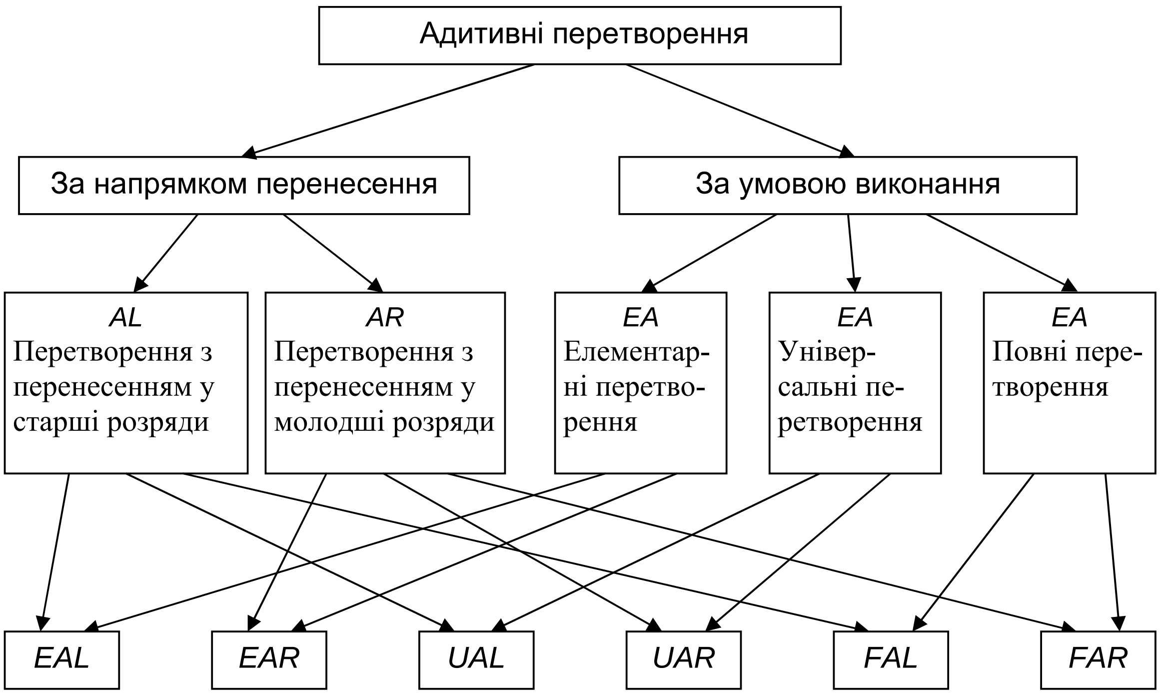

Рис. 1. Класифікація адитивних перетворень

Розглянемо кожен з видів адитивних перетворень окремо. За напрямком перенесення *А*-перетворення поділяються на перетворення з перенесенням у старші розряди (*AL*-перетворення) і перетворення з перенесенням у молодші розряди (*AR*-перетворення). При *AL*-перетворенні відбувається додавання до старших розрядів і віднімання від молодших, а при *AR*-перетворенні – навпаки:

$$^{t}AL_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1}): X_{0}^{i} - R_{i-\tau p}^{\tau,p} + X_{i+1}^{n-i-2} + w^{i+t};$$

$$^{t}AR_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1}): X_{i+1}^{n-i-2} - w^{i+t} + X_{0}^{i} + R_{i-\tau p}^{\tau,p}.$$

Адитивні перетворення виконуються за необхідних і достатніх умов. Необхідна умова *i*-го *AL*-перетворення полягає у тому, що значення розрядів від 0-го до *i*-го повинне бути не меншим, ніж відповідне граничне значення, а значення (*i*+*t*)-го розряду повинне бути меншим ніж старша цифра. Необхідна умова *i*-го *AR*-перетворення полягає у тому, що значення розрядів від 0-го до *i*-го повинні бути не більшими, ніж різниця між максимальним кодом у цих розрядах і відповідним граничним значенням, а значення (*i*+*t*)-го розряду повинне бути більшим нуля.

За достатніми умовами виконання *А*-перетворення поділяються на елементарні (*E*), універсальні (*U*) та повні (*F*). При елементарних *А*-перетвореннях (*EA*-перетвореннях) перевіряються достатні умови в кожному окремому розряді перетворюваної частини коду:

$$ {}^{t}EAL_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1}) = \begin{cases} X_{0}^{n-1} \text{ при } (x_{i+t} = c_{k-1}) \vee \underset{0 \le j \le p}{\exists} (x_{i-\tau(p-j)} < r_{\tau j}); \\ (X_{i+1}^{n-i-2} + w^{i+t}) + (X_{0}^{i} - R_{i-\tau p}^{\tau,p}) \text{ при} \\ (x_{i+t} < c_{k-1}) \wedge \underset{0 \le j \le p}{\forall} (x_{i-\tau(p-j)} \ge r_{\tau j}); \end{cases} $$

$$ {}^{t}EAR_{i}^{\tau,p}(X_{0}^{n-1}) = \begin{cases} X_{0}^{n-1} \text{ при } (x_{i+t} = 0) \vee \underset{0 \le j \le p}{\exists} (x_{i-\tau(p-j)} + r_{\tau j} > c_{k-1}); \\ (X_{i+1}^{n-i-2} - w^{i+t}) + (X_{0}^{i} + R_{i-\tau p}^{\tau,p}) \text{ при} \\ (x_{i+t} > 0) \wedge \underset{0 \le j \le p}{\forall} (x_{i-\tau(p-j)} + r_{\tau j} \le c_{k-1}). \end{cases} $$

Універсальні адитивні перетворення (UA-перетворення) аналогічні елементарним у тому сенсі, що вони теж полягають в еквівалентній зміні коду таким чином, що хоча значення окремо для старших та для молодших розрядів змінюється, значення всього коду залишається незмінним. На відміну від *EA*, в *UA*-перетвореннях виконання достатніх умов перевіряється не для значень кожного окремого розряду, а для загальних значень частин кодів. Це дає можливість виконувати *UA*-перетворення для всіх значень перетворюваної частини коду, що задовольняють необхідним умовам перетворення:

$$ {}^{t}UAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b+t}) = \begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b+t} \text{ при } (x_{i+t} = c_{k-1}) \vee X_{i-\tau b}^{\tau b} < R_{i-\tau p}^{\tau,p}; \\ X_{i-\tau b}^{\tau b+t} + w^{i+t} - R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (x_{i+t} < c_{k-1}) \wedge X_{i-\tau b}^{\tau b} \ge R_{i-\tau p}^{\tau,p}; \end{cases} $$

$$ {}^{t}UAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b+t}) = \begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b+t} \text{ при} \\ (\mathrm{x}_{\mathrm{i}+t} = 0) \vee X_{i-\tau b}^{\tau b} + R_{i-\tau p}^{\tau,p} > c_{k-1} \sum_{j=i-\tau b}^{i} w^{j}); \\ X_{i-\tau b}^{\tau b+t} - w^{i+t} + R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (\mathrm{x}_{\mathrm{i}+t} > 0) \wedge (X_{i-\tau b}^{\tau b} + R_{i-\tau p}^{\tau,p} \le c_{k-1} \sum_{j=i-\tau b}^{i} w^{j}). \end{cases} $$

При повному адитивному перетворенні (FA-перетворенні) виконуються універсальні адитивні перетворення не тільки в *i*-му, але й у всіх молодших перетворюваних розрядах. Достатньою умовою *FA*-перетворення є виконання достатньої умови *UA*-перетворення хоча б в одному з перетворюваних розрядів. Результатом виконання ${}^{t}FA_{i}^{\tau,p}$-перетворення над розрядами коду від (*i*-*τb*)-го до (*i*+*t*)-го є код, у якого для кожного *j* від (*i*-*τb*)-го до *i*-го значення розрядів від (*j*-*τb*)-го до *j*-го не задовольняє умові ${}^{t}UA_{i}^{\tau,p}$-перетворення того ж напрямку:

$$ {}^{t}FAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = {}^{t}UAL_{i-\tau b}^{\tau,p}({}^{t}UAL_{i-\tau+t}^{\tau,p}(\cdots {}^{t}UAL_{i-t}^{\tau,p}({}^{t}UAL_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))\cdots)). $$

$$ {}^{t}FAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = {}^{t}UAR_{i-\tau b}^{\tau,p}({}^{t}UAR_{i-\tau+t}^{\tau,p}(\cdots {}^{t}UAR_{i-t}^{\tau,p}({}^{t}UAR_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))\cdots)). $$

Адитивні перетворення є узагальненням відомих операцій перенесення та запозичення при виконанні порозрядного додавання і віднімання. Дійсно, перенесення і запозичення так само, як і адитивні перетворення, змінюють значення окремих розрядів, не змінюючи значення всього коду. Зміна значень розрядів при перенесенні і запозиченні основана на адитивному співвідношенні між вагами розрядів. Наприклад, перенесення при переповненні деякого розряду полягає в додаванні до старшого розряду одиниці і відніманні від переповненого розряду еквівалентного значення, що по суті і являє собою *AL*-перетворення. Але на відміну від перенесення і запозичення *A*-перетворення в *AM*-системах числення можуть виконуватись не тільки у випадку, при якому значення розряду стає більшим максимальної цифри або меншим нуля, але й у випадку, при якому певна група розрядів досягає граничного значення, вираженого заданим кодом. Тому у цих системах числення адитивні перетворення можуть виконуватись як під час операцій додавання і віднімання, так і окремо від них.

Порозрядне додавання

В *AM*-системах числення додавання виконується у такий самий спосіб, що й у відомих позиційних системах числення. Спочатку додаються цифри в окремих розрядах, а потім при необхідності виконується перенесення між розрядами. Розглянемо більш детально процес порозрядного додавання послідовних кодів, починаючи зі старших розрядів. Нехай потрібно знайти код результату Z, що дорівнює сумі кодів X і Y $X+Y=Z$. При порозрядному додаванні в *AM*-системах числення на входи порозрядного суматора, починаючи зі старшого розряду, надходять послідовні коди доданків X та Y, а з виходу, починаючи зі старших розрядів, надходить послідовний код суми Z, як зображено на рис. 2.

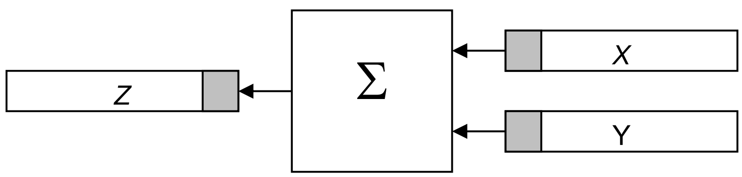

Рис. 2. Загальна схема порозрядного додавання

Порозрядне додавання кодів в *AM*-системах числення виконується за відомим методом неавтономної обробки [3] і являє собою послідовність кроків додавання окремих розрядів, починаючи зі старшого, на кожному з яких визначається код результату Z_i таким чином, що на останньому кроці він дорівнює коду результату Z. На черговому i-му кроці у додаванні беруть участь (n-i-1)-ті розряди доданків. При виконанні додавання чергових розрядів доданків виникає перенесення в інші розряди результату. Оскільки в загальному випадку основа *AM*-системи числення не є цілою, то перенесення може бути як у старші, так і в молодші розряди. Тому код результату Z_i у загальному випадку може мати ненульове значення у розрядах молодших і старших від (n-i-1)-го. Визначення результату Z_i на кожному кроці відбувається шляхом додавання коду чергових розрядів до результату, отриманого на попередньому кроці:

$$Z_i = Z_{i-1} + x_i + y_i \,.$$

Слід відзначити, що оскільки *AL*- і *AR*-перетворення виконуються над розрядами, розташованими один від одного на відстані, кратній t, то перенесення у будь-який i-ий розряд може бути тільки з розрядів з номерами ($i \pm nt$).

Отже, для визначення перенесення в i-й розряд потрібно аналізувати тільки ті розряди, що мають номери ($i \pm nt$), де n=1, 2, 3,... Це дозволяє розглядати додавання у будь-якій *AM*-системі числення з параметром адитивного співвідношення t>1 як декілька незалежних додавань, кожне з яких виконується в *AM*-системі числення з такими ж параметрами, але при t=1. Тому для спрощення аналізу без обмеження узагальнень далі буде розглянуто тільки випадок t=1.

Особливістю додавання в *AM*-системах числення є можливість обмеження розповсюдження перенесення у старші розряди за рахунок виконання *FAL*-перетворення над групою розрядів на попередньому такті додавання:

$$Z_i = {}^1FAL_{n-1-i}^{\tau,p}(Z_{i-1} + (x_{n-1-i} + y_{n-1-i}) \cdot w^{n-1-i}).$$

Обмеження довжини перенесення при виконанні додавання в *AM*-системах числення зумовлене двома властивостями *AM*-систем числення. Перша властивість притаманна взагалі всім позиційним системам числення зі зростаючим рядом ваг розрядів. Вона є очевидною і полягає у тому, що результат додавання будь-якої групи розрядів не більший від одиниці деякого старшого по відношенню до неї розряду:

$$\sum_{i=m}^{b} 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^{m-i} \le w^{m+d}.$$

Друга властивість притаманна тільки *AM*-системам числення. Вона полягає у тому, що внаслідок виконання універсального адитивного *L*-перетворення над певною групою розрядів їх значення стає меншим від граничного для цієї групи.

Для оцінки максимальної довжини *d* перенесення у старші розряди потрібно кожен такт додавання розділити на два етапи. Перший етап – додавання окремих розрядів і отримання коду їх суми S_i. Другий етап – додавання S_i до результату T_{i-1}, отриманого на попередньому такті. Отже, порозрядне додавання можна зобразити, як додавання S_i до T_{i-1} на кожному *i*-му такті.

На першому етапі додавання окремих розрядів виконується у звичайний для позиційних систем числення спосіб. Нехай на *i*-му такті додаються розряди x_i та y_i. При цьому може виникнути переповнення ($x_i+y_i>c_{k-1}$). Для ліквідації переповнення використовується *FAL*-перетворення. *FAL*-перетворення в загальному випадку викликає перенесення як у деякий старший розряд, так і в Δ молодших по відношенню до групи розрядів. Якщо відома максимальна довжина перенесення у старші *dSmax* і в молодші Δ*Smax* розряди від додавання двох окремих розрядів, то код їхньої суми можна отримати, виконуючи *FAL*-перетворення:

$$(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta(S-1)\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max-1})_{i-\Delta S\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max}. \tag{3}$$

Максимальне перенесення буде при додаванні розрядів з максимальними цифрами c_{k-1} і являє собою код *Smax*, що складається з *dSmax*+1 старших і Δ*Smax* молодших розрядів:

$$S\max = 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i = S_{i-\Delta S\max}^{dS\max+\Delta S\max+1}.$$

Слід відзначити, що при $c_{k-1}>r_p$ може бути декілька кодів максимального значення S*max* з різною довжиною *dSmax* і, відповідно, різними старшими цифрами $S_{i+dSmax}$ в залежності від того, над якими розрядами виконувалось повне *AL*-перетворення (3). При мінімальному значенні $dSmax_{\min}$ старший розряд коду *Smax* матиме значення не більше ніж c_{k-1}:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\min}-1})_{i+dS\max_{\min}}^{0} \le c_{k-1} \cdot w^{i+dS\max_{\min}}.$$

При максимальному значенні $dSmax_{max}$ старший розряд коду S*max* матиме значення не більше ніж r_p:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\max}-1})_{i+dS\max_{\max}}^{0} \le r_p \cdot w^{i+dS\max_{\max}}.$$

Для визначення $dSmax_{max}$ потрібно виконати послідовність операцій, подібних *EAR*-перетворенню. На відміну від *EAR*-перетворення ці операції повинні виконуватись навіть при переповненні у молодших розрядах. Їх сутність полягає у тому, що виконуються послідовні перетворення, починаючи з одиниці деякого розряду з перенесенням у молодші розряди. На кожному кроці перетворення від найстаршого значущого розряду коду, отриманого на попередньому кроці, віднімається його значення. Еквівалентне значення додається у вигляді коду в розряди, молодші від найстаршого значущого. Над результатом виконується *UAL*-перетворення у розряд, молодший від найстаршого значущого.

Таким чином, код, що дорівнює одиниці деякого розряду, на кожному кроці зміщується вправо і при цьому збільшується. Нехай спочатку цей код дорівнює одиниці деякого m-го розряду: $X_0=w^m$. Тоді на i-му кроці значення коду буде

$$X_i = UAL^{\tau,p}_{m-\tau p-i}(X_{i-1} - x_{m-i+1}\cdot(w^{m-i+1} - R^{\tau,p}_{m-\tau p-i})),$$

де i=1, 2, 3,... Ці кроки перетворення потрібно повторювати до тих пір, доки $X_i<2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$. Якщо після закінчення повтору кроків $X_i=2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$, то максимальна довжина перенесення в старші розряди від додавання m-тих розрядів $dSmax_{max}$ дорівнює кількості кроків перетворення. Якщо ж $X_i>2\cdot c_{k-1}\cdot w^{m-i}$, то $dSmax_{max}$ на одиницю менша від кількості кроків перетворення. Аналогічно визначається $dSmax_{\min}$, тільки початкове значення m-го розряду встановлюється рівним максимальній цифрі c_{k-1}.

На другому етапі виникає перенесення від перевищення граничного значення при додаванні коду окремих розрядів до проміжного результату. Воно реалізується за допомогою FAL-перетворення результату додавання S_i і проміжного результату T_{i-1}, отриманого на попередньому такті. Максимальна довжина dT цього перенесення визначається кількістю розрядів, необхідних для поглинання даного і наступних перенесень від додавання окремих розрядів. Загальна максимальна довжина перенесення у старші розряди $d=dS+dT$. Наступне твердження дозволяє визначити межі, в яких може знаходитись значення d в довільній AM-системі числення.

Твердження 1. Нехай для AM-системи числення задані множина цифр {0, 1, ..., c_{k-1}} і адитивне співвідношення ${}^1A^{\tau,p}$. Нехай також для цієї системи числення визначені:
$dSmax_{\min}$ – мінімальна довжина перенесення у старші розряди при додаванні максимальних цифр в одному розряді;
dZ – найбільша кількість розрядів, загальне максимальне значення яких менше граничного значення адитивного співвідношення, тобто,

$$c_{k-1}\cdot\sum_{i=0}^{dZ-1} w^{\tau p-i} < {}^1R_0^{\tau,p} \le c_{k-1}\cdot\sum_{i=0}^{dZ} w^{\tau p-i}\ . \tag{4}$$

Тоді на будь-якому кроці порозрядного додавання максимальна довжина d перенесення у старші розряди знаходиться у межах

$$d \ge dZ + dS\max_{\min} + H[p],$$

де $H[p]$ – дискретна одинична функція Хевісайда.

Доведення твердження 1.

Для доведення твердження достатньо навести приклади, в яких при порозрядному додаванні у будь-якій AM-системі числення з довжиною перенесення у старші розряди $d<dZ+dSmax_{\min}+H[p]$ виникає переповнення. Доведення буде виконуватись окремо для кожного з двох можливих випадків: p=0 та p>0.

У першому випадку $H[p]$=0, $dSmax_{\min}$>0 і dZ=0 за визначенням (4). Тому для доведення твердження достатньо навести приклад порозрядного додавання, що викликає переповнення у будь-якій системі числення при $d< dSmax_{\min}$. Розглянемо приклад додавання n-розрядних кодів з максимальними цифрами

$$c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j + c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j$$

з довжиною перенесення $d=dSmax_{\min}$-1. При порозрядному додаванні цих кодів, починаючи зі старших розрядів, на перших $dSmax_{\min}$ кроках умова для FAL-перетворення не виконується. На кожному i-му кроці порозрядного додавання, починаючи з $dSmax_{\min}$-го, відбувається перенесення у старші розряди, що не менше $c_{k-1}\cdot w^{i+dS\max_{\min}}$ за умовою визначення $dSmax_{\min}$. Це перенесення викликає переповнення у розрядах з i-го по ($i+dSmax_{\min}$-1)-ий, яке не може бути ліквідовано за рахунок перенесення у молодші розряди, оскільки і у них на наступних тактах відбувається переповнення. Отже, для випадку p=0 твердження 1 доведено.

У другому випадку $H[p]$=1. Тому для доведення твердження достатньо навести приклад порозрядного додавання, в якому виникає переповнення при $d<dZ+dSmax_{\min}+1$. Розглянемо приклад додавання коду

$$c_{k-1} \cdot \sum_{j=n-1-dZ}^{n-1} w^i + c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$$

та коду

$$c_{k-1} \cdot \sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$$

з довжиною перенесення $d=dZ+dSmax_{\min}$. При порозрядному додаванні цих кодів, починаючи зі старших розрядів, на кроках від 1-го до ($dZ+dSmax_{\min}$)-го умова для FAL-перетворення не виконується. На ($dZ+dSmax_{\min}+1$)-му кроці відбувається перенесення у (n-dZ-2)-ий розряд, що не менше c_{k-1} за умовою визначення $dSmax_{\min}$. Оскільки довжина перенесення у старші розряди $d=dZ+dSmax_{\min}$, то на даному кроці FAL_{n-1}-перетворення вже не може бути виконано, а умова FAL_{n-2}-перетворення ще не виконується. Тому (n-dZ-2)-ий розряд суми матиме максимальне значення c_{k-1}. На кожному наступному кроці порозрядного додавання аналогічно буде утворюватись максимальне значення c_{k-1} чергового розряду суми. Тому, враховуючи тільки перенесення у старші розряди, всі отримані розряди коду суми матимуть максимальні значення c_{k-1}. При p>0 перенесення, що виникає в результаті додавання окремих розрядів, поступає як у старші, так і у молодші розряди. Тобто, перенесення у молодші розряди, що виникає на ($dZ+dSmax_{\min}+1$)-му кроці, потрібно додавати на більш пізніх кроках. Так як без врахування перенесення у молодші розряди утворюється код суми з максимальними цифрами, то його врахування у деякому розряді викличе переповнення цього розряду. Це переповнення не можна ліквідувати за рахунок перенесення у старші розряди, оскільки вони також мають максимальне значення. Однак, це переповнення не можна ліквідувати і за рахунок перенесення у молодші розряди тому, що у них також на наступних тактах виникатиме аналогічне переповнення. Тобто, у цьому прикладі порозрядного додавання кодів виникає переповнення, яке не може бути ліквідоване при довжині перенесення у старші розряди $d<dZ+dSmax_{\min}+H[p]$. Отже, для випадку p>0 твердження 1 також доведено. Таким чином, твердження 1 доведено.

З твердження 1 слідує, що при порозрядному додаванні максимальна довжина перенесення d у старші розряди не менша ніж $dZ+dSmax_{\min}+H[p]$. При порозрядному додаванні виконується FAL-перетворення переповненого розряду проміжного результату, яке може призводити до EAR-перетворення цього розряду. Тому довжина перенесення у молодші розряди не може бути меншою ніж τp. Розрядність порозрядного суматора дорівнює сумі довжин перенесення у старші і у молодші розряди. Тобто, для розрядності N порозрядного суматора у будь-якій AM-системі числення справедливий вираз:

$$N \geq dZ + dS\max_{\min} + H[p] + \tau p \,. \tag{5}$$

З певною точністю розрядність порозрядного суматора визначає апаратні витрати на його реалізацію. Суматори є основною частиною всіх арифметичних пристроїв. Отже, вираз (5) дозволяє порівнювати між собою різні AM-системи числення за апаратними витратами на організацію порозрядної обробки.

Висновки

1. У статті досліджено AM-системи числення, що узагальнюють відомі і дозволяють створювати нові системи числення з можливістю порозрядного конвеєрного виконання усіх

арифметичних операцій, починаючи зі старших розрядів. Описано параметри, за допомогою яких задають *АМ*-системи числення, та обмеження, що накладаються на ці параметри. Для *АМ*-систем числення введено поняття адитивного співвідношення. Найбільш просто *АМ*-системи числення задавати за допомогою множини цифр C_k і адитивного співвідношення ${}^{t}A^{\tau,p}$.

2. Досліджено адитивні перетворення в *АМ*-системах числення, що є умовними арифметичними операціями та узагальнюють відомі операції перенесення і запозичення. Проведена класифікація адитивних перетворень та описані правила виконання кожного виду адитивних перетворень.

3. На основі адитивних перетворень досліджено порозрядне додавання в *АМ*-системах числення, починаючи зі старших розрядів. Таке додавання має обмежену довжину перенесення у старші розряди. Вперше сформульовано і доведено твердження про залежність довжини перенесення у старші розряди при порозрядному додаванні від параметрів
АМ-системи числення. Визначено також залежність довжини перенесення у молодші розряди від параметрів *АМ*-системи числення.

Отримані результати дозволили визначити залежність розрядності порозрядного суматора від параметрів *АМ*-системи числення. Використовуючи отримані результати можна порівнювати *АМ*-системи числення між собою за апаратними витратами при проектуванні пристроїв порозрядної обробки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Galli R. Design and evaluation of online arithmetic for signal processing applications on FPGA / R. Galli and A.F. Tenca // in Proc. SPIE Int. Conf. High-Speed Computing, Digital Signal Processing, Filtering Using Reconfigurable Logic, Aug. 2001, pp. 134 – 144.

2. Tanaka M. A high-throughput single-flux-quantum floating-point serial divider using the signed-digit representation / M. Tanaka, K. Obata, K. Takagi, N. Takagi, A. Fujimaki, N. Yoshikawa // IEEE Transaction on Applied Superconductivity, vol. 19, pp. 653 – 656, Jun. 2009.

3. Самофалов К. Г. Основы построения конвейерных ЭВМ. / К. Г. Самофалов, Г. М. Луцкий. – Киев: Высшая школа, 1981. – 234 с.

4. Каляев А. В. Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. / А. В. Каляев. – М.: Радио и связь, 1984. – 240 с.

5. Черняк О. І. Методи конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів золотої пропорції / О. І. Черняк, О. Д. *А*заров // Вісник ВПІ. – 1996. – №1. – С. 14 – 17.

6. Азаров О. Д.Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів / О. Д. *А*заров, О. І. Черняк, П. О. Черняк // Вісник ВПІ. – 2001. – №1. – С. 58 – 64.

Азаров Олексій Дмитрович – д. т. н., професор, завідувач кафедри обчислювальної техніки, директор інституту інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії;

Черняк Олександр Іванович – старший викладач кафедри обчислювальної техніки.
Вінницький національний технічний університет.